Cylinder: Jurnal Ilmiah Teknik Mesin
Volume 12, Nomor 01, April 2026
ISSN 2252-925X (Online)

Pendekatan Model Fungsi Non-Linier Perubahan Suhu pada Pencampuran Zat Cair Menggunakan Bantuan Hukum Entropi Goen

Stephanus Ivan Goenawan
Program Studi Teknik Industri, Fakultas Biosains, Teknologi, dan Inovasi.
Universitas Katolik Indonesia Atma Jaya
E-mail: steph.goenawan@atmajaya.ac.id

ABSTRAK

Hukum Termodinamika Kedua yang dikenal juga sebagai Hukum Entropi menjelaskan bahwa dalam sistem tertutup yang bekerja dalam waktu maju, tingkat ketidakteraturan atau entropi akan terus meningkat. Seiring perkembangannya, muncul konsep lanjutan yang disebut Hukum Termodinamika Kedua Titik Satu (2.1) atau Hukum Entropi Goen. Hukum ini menyatakan bahwa rerata entropi dalam proses yang berlangsung ke arah maju selalu lebih kecil dibandingkan rerata entropi dalam arah mundur. Proses rerata entropi arah mundur dijelaskan sebagai kebalikan dari rerata entropi arah maju, yang bekerja pada fungsi kalor sebagai cerminan dari proses maju. Melalui penerapan Hukum Entropi Goen dapat dibuat model non-linear berbasis fungsi waktu yang menggambarkan perubahan suhu penggabungan dua zat cair, mulai dari kondisi awal sebelum pencampuran hingga mencapai kesetimbangan termal dalam satu wadah tertutup. Hasil pemodelan eksponensial non-linear ini pada proses pencampuran dua zat cair membuktikan pentingnya Hukum Entropi Goen sebagai pengembangan dari Hukum Termodinamika Kedua dengan manfaat yang signifikan dalam menjelaskan fenomena perpindahan panas dan proses menuju kesetimbangan.

Kata kunci :
Entropi, Termodinamika, Panas, Kesetimbangan Suhu.

ABSTRACT

The Second Law of Thermodynamics also known as the Law of Entropy explains that the level of disorder or entropy will continue to increase in a closed system operating in forward time. Along with its development, a further concept emerged called the Second Law of Thermodynamics Point One (2.1) or Goen's Law of Entropy. This law states that the average entropy in a process in the forward direction is always smaller than the average entropy in the backward direction. The backward average entropy process is the opposite of the forward average entropy, which works on the heat function to reflect the forward process. Applying Goen's Law of Entropy a non-linear model based on the function of time can be created that describes the change in temperature of the combination of two liquids, starting from the initial conditions before mixing to reaching thermal equilibrium in a closed container. The results of this non-linear exponential modeling in mixing two liquids prove the importance of Goen's Law of Entropy as a development of the Second Law of Thermodynamics with significant benefits in explaining the phenomenon of heat transfer and the process towards equilibrium.

***Keywords* :**
Entropy, Thermodynamics, Heat, Temperature Equilibrium.

1. LATAR BELAKANG

Dalam kompleksitas alam semesta yang luar biasa di mana materi dan energi saling berinteraksi, Hukum Termodinamika menjadi salah satu prinsip utama yang membantu manusia memahami dunia ini. Hukum ini menyediakan dasar untuk menjelaskan konsep energi, panas, dan kerja mekanik. Penelitian ini berfokus pada Hukum Termodinamika Kedua yang dikenal juga sebagai Hukum Entropi [5]. Hukum ini secara elegan menjelaskan konsep ketidakteraturan sebagai indikator perubahan yang tak terhindarkan dalam sebuah sistem [7].

Hukum Termodinamika Kedua memberikan wawasan mendalam tentang arah perubahan dalam sistem, dengan penekanan pada prinsip bahwa sistem tidak dapat secara spontan mencapai keadaan dengan entropi lebih rendah [6]. Konsep ini pertama kali dirumuskan oleh Rudolf Clausius pada abad ke-19. Melalui Hukum Entropi, kita memahami bahwa entropi merupakan ukuran ketidakteraturan sistem, dan pemahaman yang mendalam terhadap hukum ini membuka peluang bagi kemajuan ilmu pengetahuan, teknologi, serta aplikasinya di berbagai bidang praktis.

Dalam sistem tertutup yang aktif dan beroperasi seiring waktu, tingkat ketidakteraturan sistem atau entropi akan terus meningkat sesuai dengan prinsip yang dikenal sebagai Hukum Entropi [8-11]. Konsekuensi dari hukum ini adalah bahwa perubahan dalam sistem cenderung menuju keadaan yang lebih tidak teratur atau acak [14]. Pemahaman terhadap Hukum Entropi memberikan landasan penting bagi manusia dalam memahami berbagai proses alam, mulai dari fenomena fisika hingga reaksi kimia yang terjadi di dunia sekitar kita [12].

Hukum Entropi memiliki peran yang sangat signifikan dalam eksplorasi energi dan efisiensi sistem. Pengetahuan ini mendukung manusia dalam memahami proses konversi energi secara mendalam dan mendorong munculnya inovasi di berbagai bidang. Sebagai contoh, Hukum Termodinamika Kedua telah berkontribusi pada pengembangan teknologi seperti mesin-mesin termal yang lebih efisien yang mendukung kemajuan di bidang energi terbarukan. Selain itu, dari sisi keilmuan, konsep entropi memberikan penjelasan mendalam mengenai perubahan keadaan gas dan perpindahan panas [13].

Penerapan Hukum Entropi tidak hanya mendorong inovasi teknologi baru, tetapi juga memperluas batasan pemahaman kita tentang alam semesta. Dalam konteks perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, pemahaman terhadap hukum ini menjadi semakin penting. Hukum Entropi memberikan wawasan tentang arah alami dari berbagai fenomena yang kita amati sehari-hari, serta potensi untuk menggali lebih dalam tentang hakikat alam semesta.

Penelitian ini secara khusus mengeksplorasi esensi dari Hukum Entropi, termasuk konsep Hukum Entropi Goen atau Hukum Termodinamika 2.1 beserta aplikasinya. Dengan pemahaman yang baik tentang Hukum Entropi Goen, penelitian ini menganalisis model non-linear eksponensial terhadap fungsi waktu, khususnya dalam perubahan suhu hingga tercapainya kesetimbangan panas dalam proses pencampuran dua zat cair bersuhu berbeda. Melalui pendekatan ini diharapkan kontribusi yang signifikan bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Penelitian analitis ini bertujuan untuk mengeksplorasi dan memanfaatkan Hukum Termodinamika 2.1 yang dikenal juga sebagai Hukum Entropi Goen, sebuah pengembangan lanjutan dari Hukum Termodinamika Kedua [4]. Hukum Entropi Goen menyatakan bahwa rerata total entropi dalam proses arah maju lebih kecil dibandingkan rerata entropi dalam proses arah mundur.

Dalam penelitian ini, Hukum Entropi Goen digunakan untuk merancang model fungsi eksponensial non-linear berbasis waktu, yang menggambarkan perubahan suhu dalam pencampuran dua zat cair hingga mencapai kesetimbangan termal. Pendekatan ini menawarkan cara baru untuk memahami hubungan antara waktu dan perubahan suhu selama proses pencampuran tersebut [11].

Dengan pemanfaatan Hukum Entropi Goen untuk membangun model teoretis yang menggambarkan dinamika waktu maju terhadap perubahan suhu, penelitian ini diharapkan dapat berkontribusi pada pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi [4]. Selain itu, studi ini juga memperkuat apresiasi terhadap kekayaan konsep dasar Hukum Entropi Goen, yang memungkinkan pemahaman yang lebih dalam tentang fenomena alam dan mekanisme kerja dunia fisik.

2. METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan Hukum

Termodinamika 2.1 yaitu membandingkan antara rerata entropi total arah maju dengan rerata entropi total arah mundur. Entropi total arah mundur adalah entropi total arah maju tapi bekerja pada fungsi kalor cerminan sebelumnya yaitu fungsi kalor terhadap waktu arah maju. Menurut Hukum Termodinamika 2.1 atau hukum entropi Goen, nilai rerata entropi total arah maju bernilai lebih kecil daripada rerata entropi total arah mundurnya. Pada penelitian ini perbandingan kedua rerata entropi total ini akan dibandingkan melalui proses analitis [1-3]. Secara matematis, Hukum Entropi Goen yang menyatakan bahwa nilai rerata entropi total pada proses kerja sistem arah maju lebih kecil atau sama dengan arah mundurnya adalah [4]:

$$\frac{\int_0^{t_s} S^{+}(t).dt}{t_s} \leq \frac{\int_0^{t_s} S^{-}(t).dt}{t_s} \qquad (1)$$

Selanjutnya, penelitian ini akan memanfaatkan Hukum Termodinamika 2.1 untuk mencari model pelepasan kalor atau penerimaan kalor berupa fungsi suhu yang gayut terhadap waktu dalam mencapai kesetimbangan panas. Sebelumnya telah dapat dibuktikan suatu rumus suhu kesetimbangan dari dua gabungan zat cair, yaitu:

$$T_s = \frac{m_a c_a T_a + m_b c_b T_b}{m_a c_a + m_b c_b} \qquad (2)$$

Misal dalam percobaan zat cair yang akan digabungkan sama jenisnya maka $c_a = c_b = c$, pers. (2) di atas dapat disederhanakan menjadi:

$$T_s = \frac{m_a T_a + m_b T_b}{m_a + m_b} \qquad (3)$$

Di mana urutan nilai suhu: $T_a < T_s < T_b$.

Dari Hukum Termodinamika 2, persamaan Hukum Entropi adalah perubahan kecil entropi pada sistem sama dengan perubahan kecil kalornya dibagi dengan besarnya suhu saat itu.

$$dS = \frac{dQ(t)}{T(t)} \qquad (4)$$

di mana pada zat cair perubahan kecil kalor dirumuskan dengan:

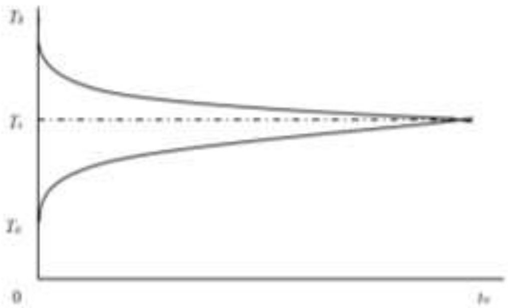
$$dQ(t) = mcdT(t) \qquad (5)$$

maka dari pers. (4), persamaan entropi (S) menjadi:

$$S = \int \frac{mc}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} dt \qquad (6)$$

3. BUKTI ANALITIS DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini akan dibuat model pelepasan kalor atau penerimaan kalor berupa fungsi suhu yang gayut terhadap waktu dalam mencapai kesetimbangan adalah non-linier berupa eksponensial dalam periode waktu t_w, yang tampak pada Gambar 1 di bawah ini:



Gambar 1. Fungsi Suhu Non-Linier Eksponential Arah Maju dalam Mencapai Kesetimbangan

Fungsi non-linier eksponential dari T_a menuju ke T_s adalah:

$$T_{a \to s}(t) = T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t} \qquad (7)$$

Parameter α adalah konstanta eksponensial dari fungsi suhu terhadap waktu pada pencampuran dua zat cair dalam mencapai suhu kesetimbangan dan nilai $\alpha > 0$, Saat $t = 0$ nilai $T_{a \to s}(t = 0) = T_a$ dan $t = t_w$ maka $e^{-\alpha t} \to 0$ sehingga nilai $T_{a \to s}(t_w) \cong T_s$; turunan pertama pers. (7) terhadap waktu adalah:

$$\frac{d(T_{a \to s}(t))}{dt} = -\alpha(T_a - T_s)e^{-\alpha t} \qquad (8)$$

Fungsi non-linier eksponential dari T_b menuju ke T_s adalah:

$$T_{b \to s}(t) = T_s + (T_b - T_s)e^{-\alpha t} \qquad (9)$$

dan nilai $\alpha > 0$, Saat $t = 0$ nilai $T_{b\to s}(t = 0) = T_b$ dan $t = t_w$ maka $e^{-\alpha t} \to 0$ sehingga nilai $T_{b\to s}(t_w) \cong T_s$; turunan pertama pers. (9) terhadap waktu adalah:

$$\frac{d(T_{b\to s}(t))}{dt} = -\alpha(T_b - T_s)e^{-\alpha t} \qquad (10)$$

Persamaan Entropi *In* (S_i) yang gayut terhadap waktu saat menerima kalor adalah:

$$S_{a\to s}(t) = \int_0^t \frac{m_a c_a}{T_{a\to s}(t)} d(T_{a\to s}(t))$$
$$S_{s\to a}(t) = \int_{t_w}^{t} \frac{m_a c_a}{T_{a\to s}(t)} \alpha \cdot (T_s - T_a)e^{-\alpha t} dt \qquad (11)$$

kemudian dilakukan pengintegralan menjadi:

$$S_{a\to s}(t) = m_a c_a[\ln T_{a\to s}(t)]_0^t = m_a c_a[\ln T_{a\to s}(t) - \ln T_{a\to s}(0)] \qquad (12)$$

sehingga menjadi formula:

$$S_{a\to s}(t) = m_a c_a[\ln(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t}) - \ln T_a] \qquad (13)$$

Dengan cara yang sama maka persamaan Entropi *Out* (S_o) yang gayut terhadap waktu saat melepaskan kalor adalah:

$$S_{b\to s}(t) = \int_0^t \frac{m_b c_b}{T_{b\to s}(t)} d(T_{b\to s}(t)) \qquad (14)$$

kemudian dilakukan pengintegralan menjadi:

$$S_{b\to s}(t) = m_b c_b[\ln T_{b\to s}(t)]_0^t = m_b c_b[\ln T_{b\to s}(t) - \ln T_{b\to s}(0)] \qquad (15)$$

sehingga menjadi formula:

$$S_{a\to s}(t) = m_a c_a[\ln(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t}) - \ln T_a] \qquad (16)$$

Selanjutnya akan dibuktikan hasil persamaan rerata entropi untuk Entropi *In* (S_i) arah maju pada periode t_w yaitu $\overline{S_{a\to s}}$, adalah: Keterangan pembuktian mencari rerata entropi arah maju $\overline{S_{a\to s}}$, dimana nilai $0 \leq t \leq t_w$.

Telah diketahui persamaan entropi dari suhu T_a menuju kesetimbangan T_s dari pers. (11-13), yaitu:

$$S_{a\to s}(t) = m_a c_a[\ln(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t}) - \ln T_a] \qquad (17)$$

Kemudian mencari nilai reratanya mulai dari waktu nol hingga waktu kesetimbangan suhu tercapai (t_w), yaitu:

$$\overline{S_{a\to s}} = \frac{1}{t_w}\int_0^{t_w} S_{a\to s}(t) = \frac{1}{t_w}\int_0^{t_w} m_a c_a[\ln(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t}) - \ln T_a]\, dt \qquad (18)$$

$$\overline{S_{a\to s}} = \frac{m_a c_a}{t_w}\int_0^{t_w} [\ln(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t}) - \ln(T_a)]\, dt \qquad (19)$$

$$\overline{S_{a\to s}} = \frac{m_a c_a}{t_w}\left|\int_0^{t_w} \ln\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t}\right) dt + \int_0^{t_w} \ln(T_s)\, dt \int_0^{t_w} \ln(T_a)\, dt\right| \qquad (20)$$

Pengintegralan pada suku pertama akan dijabarkan di bawah ini:

$$\int_0^{t_w} \ln(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t})\, dt = \int_0^{t_w} \ln\left(T_s\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t}\right)\right) dt \qquad (21)$$

$$\int_0^{t_w} \ln(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t})\, dt = \int_0^{t_w} \left(\ln(T_s) + \ln\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t}\right)\right) dt \qquad (22)$$

$$\int_0^{t_w} \ln(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t})\, dt = \int_0^{t_w} \ln\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t}\right) dt + \int_0^{t_w} \ln(T_s)\, dt \qquad (23)$$

Dengan mensubstitusikan pers. (21-23) ke pers. (18-20) maka persamaan rerata entropi menjadi:

$$\overline{S_{a\to s}} = \frac{m_a c_a}{t_w}\left[\int_0^{t_w} \ln(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha t})\, dt - \int_0^{t_w} \ln(T_a)\, dt\right] \quad (24)$$

$$\overline{S_{a\to s}} = \frac{m_a c_a}{t_w}\left[\int_0^{t_w} \ln\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha t}\right) dt + \int_0^{t_w} \ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right) dt\right] \quad (25)$$

Pemisalan fungsi:

$$u = 1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha t} \quad (26)$$

kemudian diturunkan sekali:

$$\frac{du}{dt} = -\alpha \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha t} = -\alpha(u-1) \quad (27)$$

atau

$$dt = \frac{du}{-\alpha(u-1)} \quad (28)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan pers. (26-28 ke pers.(24-25) diperoleh hasil:

$$\overline{S_{a\to s}} = \frac{m_a c_a}{t_w}\left[\frac{1}{-\alpha}\int_0^{t_w} \frac{\ln(u)}{u-1} du + \int_0^{t_w} \ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right) dt\right] \quad (29)$$

Untuk mencari integral pada suku kedua digunakan bantuan deret Maclaurin untuk fungsi $y(u) = \ln(u+1)$, pertama-tama mencari konstanta:

$$\begin{aligned} C_0 &= y(u=0) = \ln(1) = 0 \\ C_1 &= \frac{y^{(1)}(u=0)}{1!} = \frac{(u+1)^{-1}}{1!} = 1 \\ C_2 &= \frac{y^{(2)}(u=0)}{2!} = \frac{-(u+1)^{-2}}{2!} = -\frac{1}{2} \\ C_3 &= \frac{y^{(3)}(u=0)}{3!} = \frac{2(u+1)^{-3}}{3!} = \frac{1}{3} \\ &\dots \\ C_n &= \frac{y^{(n)}(u=0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,(u+1)^{-n}}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \end{aligned} \quad (30)$$

Sehingga fungsi $\ln(u+1)$ dapat didekati menjadi persamaan:

$$\ln(v+1) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}v^n \quad (31)$$

$$\frac{\ln(v+1)}{v} = 1 - \frac{1}{2}v^1 + \frac{1}{3}v^2 - \frac{1}{4}v^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n}v^{n-1} \quad (32)$$

kemudian misal $u = v + 1$ dan $v = u - 1$, dimana $u \neq 1$, maka pers.(31-32) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\frac{\ln(u)}{u-1} = 1 - \frac{1}{2}(u-1)^1 + \frac{1}{3}(u-1)^2 - \frac{1}{4}(u-1)^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n}(u-1)^{n-1} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}(u-1)^n \quad (33)$$

Selanjutnya dilakukan pengintegralan mulai dari nol hingga t_w menjadi:

$$\int_0^{t_w} \frac{\ln(u)}{u-1} du = \int_0^{t_w} \left[1 - \frac{1}{2}(u-1)^1 + \frac{1}{3}(u-1)^2 - \frac{1}{4}(u-1)^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n}(u-1)^{n-1}\right] du \quad (34)$$

$$\int_0^{t_w} \frac{\ln(U)}{U-1} dU = \left[U - \frac{1}{2^2}(U-1)^2 + \frac{1}{3^2}(U-1)^3 - \frac{1}{4^2}(U-1)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}(U-1)^n\right]_0^{t_w} \quad (35)$$

dengan mensubstitusikan pers. (26) ke pers.(34-35) maka dihasilkan:

$$\int_0^{t_w} \frac{\ln(u)}{u-1} du = \left[1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t}\right)^3 - \frac{1}{4^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t}\right)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t}\right)^n\right]_0^{t_w} \quad (36)$$

batas bawah dan atas dimasukkan ke dalam fungsi:

$$\int_0^{t_w} \frac{\ln(u)}{u-1}du = \left[1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t_w} - \frac{1}{2^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t_w}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t_w}\right)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}e^{-\alpha t_w}\right)^n\right] - \left[1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} - \frac{1}{2^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^n\right] \tag{37}$$

disederhanakan lagi menjadi:

$$\int_0^{t_w} \frac{\ln(u)}{u-1}du = \frac{(T_a - T_s)}{T_s}\left(e^{-\alpha t_w} - 1\right) - \frac{1}{2^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^2\left(e^{-2\alpha t_w} - 1\right) + \frac{1}{3^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^3\left(e^{-3\alpha t_w} - 1\right) + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^n\left(e^{-n\alpha t_w} - 1\right) \tag{38}$$

atau dapat disingkat penulisannya menjadi:

$$\int_0^{t_w} \frac{\ln(u)}{u-1}du = \frac{(T_a - T_s)}{T_s}\left(e^{-\alpha t_w} - 1\right) + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^k\left(e^{-k\alpha t_w} - 1\right) \tag{39}$$

kemudian dapat dieksekusi persamaan integral suku kedua pers. (24-25) menjadi:

$$\int_0^{t_w} \ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right)dt = \ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right)[t]_0^{t_w} = t_w \ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right) \tag{40}$$

Selanjutnya mensubstitusikan pers. (39) dan (40) ke pers. (24-25) akan diperoleh hasil formula rerata entropi arah maju dari T_a menuju T_s selama rentang waktu t_w, yaitu:

$$\overline{S_{a\to s}} = \frac{m_a c_a}{t_w}\left[\frac{1}{-\alpha}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\left(e^{-\alpha t_w} - 1\right) + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^k\left(e^{-k\alpha t_w} - 1\right)\right) + t_w \ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right)\right] \tag{41}$$

Pers. (41) dapat disederhanakan kembali mengingat nilai $e^{-k\alpha t_w} \approx 0$, sehingga menjadi:

$$\overline{S_{a\to s}} = m_a c_a \left[\ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right) - \frac{1}{\alpha t_w}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{T_a}{T_s}\right)^k\right] \tag{42}$$

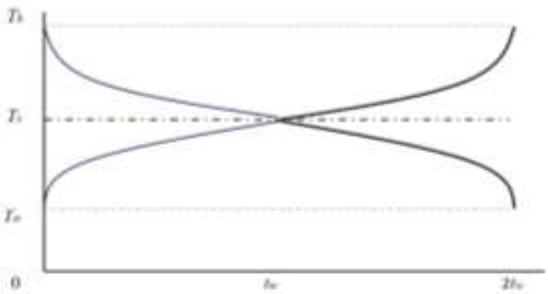
Pembuktian dengan cara yang sama, maka hasil persamaan rerata entropi untuk Entropi arah maju pada periode t_w adalah:

$$\overline{S_{b\to s}} = m_b c_b \left[\ln\left(\frac{T_s}{T_b}\right) + \frac{1}{\alpha t_w}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\left(\frac{T_b}{T_s} - 1\right)^k\right] \tag{43}$$

Hasil total jumlahan persamaan rerata entropy arah maju pada periode t_w adalah:

$$\overline{S_{T+}} = \overline{S_{a\to s}} + \overline{S_{b\to s}}$$
$$\overline{S_{T+}} = m_a c_a \left[\ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right) - \frac{1}{\alpha t_w}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{T_a}{T_s}\right)^k\right] + m_b c_b \left[\ln\left(\frac{T_s}{T_b}\right) + \frac{1}{\alpha t_w}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\left(\frac{T_b}{T_s} - 1\right)^k\right] \tag{44}$$

Selanjutnya akan mencari persamaan rerata entropi total pada proses arah mundur, dimana pada penelitian ini akan dibuat model pelepasan kalor atau penerimaan kalor berupa fungsi suhu yang gayut terhadap waktu setelah mencapai kesetimbangan kembali ke suhu semula yaitu suhu T_a dan T_b yang mengalir secara non-linier eksponential dalam rentang waktu t_w, yang tampak pada Gambar 2 di bawah ini:



Gambar 2. Fungsi Suhu Non-Linier Eksponential Arah Mundur Setelah Mencapai Kesetimbangan Kembali Menuju T_a dan T_b.

Fungsi non-linier eksponential dari T_s menuju ke T_a dari t_w ke 2 t_w adalah :

$$T_{a\to s}(t) = T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)} \tag{45}$$

Parameter α arah mundur adalah konstanta eksponensial dari fungsi suhu terhadap waktu pada pemisahan pencampuran dua zat cair yang dimulai dari suhu kesetimbangan hingga terpisah menjadi dua suhu awal yaitu T_a dan T_b. Dimana nilai $\alpha > 0$, bila diturunkan satu kali terhadap waktu menjadi:

$$\frac{dT_{a\to s}(t)}{dt} = \alpha \cdot (T_a - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)} \quad (46)$$

Fungsi non-linier eksponential dari T_s menuju ke T_b adalah:

$$T_{b\to s}(t) = T_s + (T_b - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)} \quad (47)$$

dimana nilai $\alpha > 0$, bila diturunkan satu kali terhadap waktu menjadi:

$$\frac{dT_{b\to s}(t)}{dt} = \alpha \cdot (T_b - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)} \quad (48)$$

Arah mundur atau cerminan dari $S_{a\to s}(t)$ sebuah fungsi entropi arah maju pers.(10a) ini adalah berupa $S_{s\to a}(t)$ fungsi entropi arah mundur yaitu:

$$S_{s\to a}(t) = \int_{t_w}^{t} \frac{m_a c_a}{T_{s\to a}(2t_w - t)} \alpha \cdot (T_s - T_a)e^{-\alpha(2t_w - t)} dt \quad (49)$$

$$S_{s\to a}(t) = -\int_{t_w}^{t} \frac{m_a c_a}{T_{s\to a}(2t_w - t)} (-)\alpha \cdot (T_s - T_a)e^{-\alpha(2t_w - t)} dt \quad (50)$$

Sehingga persamaan Entropy yang gayut terhadap proses pencerminan saat melepaskan kalor $T_s > T_a$, dimana nilai $t_w \le t \le 2t_w$, adalah:

$$S_{s\to a}(t) = -\int_{t_w}^{t} \frac{m_a c_a}{T_{s\to a}(2t_w - t)} d\left(T_{s\to a}(2t_w - t)\right) \quad (51)$$

kemudian dilakukan pengintegralan:

$$\begin{aligned} S_{s\to a}(t) &= -m_a c_a [\ln T_{s\to a}(2t_w - t)]_{t_w}^{t} \\ &= -m_a c_a [\ln T_{s\to a}(2t_w - t) - \ln T_{s\to a}(t_w)] \end{aligned} \quad (52)$$

sehingga menjadi formula:

$$S_{s\to a}(t) = -m_a c_a \left[\ln\left(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) - \ln T_s\right] \quad (53)$$

Dengan cara yang sama maka persamaan Entropi yang gayut terhadap proses pencerminan saat menerima kalor $T_s < T_b$, dimana nilai $t_w \le t \le 2t_w$, adalah:

$$S_{s\to b}(t) = -\int_{t_w}^{t} \frac{m_b c_b}{T_{s\to b}(2t_w - t)} d\left(T_{s\to b}(2t_w - t)\right) \quad (54)$$

sehingga menjadi formula:

$$S_{s\to b}(t) = -m_b c_b \left[\ln\left(T_s + (T_b - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) - \ln T_s\right] \quad (55)$$

Pembuktian hasil persamaan rerata entropi untuk proses $s \to a$ saat melepaskan kalor pada periode t_w yaitu $\overline{S_{s\to a}}$, dimana nilai $t_w \le t \le 2t_w$. Telah diketahui persamaan entropi dari suhu kesetimbangan T_s menuju T_a dari pers. (49-53), kemudian mencari nilai reratanya mulai dari waktu (t_w), hingga waktu pemisahan suhu menuju T_a tercapai dalam waktu $(2t_w)$, yaitu:

$$\begin{aligned} \overline{S_{s\to a}} &= \frac{1}{t_w} \int_{t_w}^{2t_w} S_{s\to a}(t)\, dt \\ &= \frac{1}{t_w} \int_{t_w}^{2t_w} -m_a c_a \left[\ln\left(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) - \ln T_s\right] dt \end{aligned} \quad (56)$$

$$\overline{S_{s\to a}} = -\frac{m_a c_a}{t_w} \int_{t_w}^{2t_w} \left[\ln\left(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) - \ln(T_s)\right] dt \quad (57)$$

$$\overline{S_{a\to s}} = -\frac{m_a c_a}{t_w} \left[\int_{t_w}^{2t_w} \ln\left(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) dt - \int_{t_w}^{2t_w} \ln(T_s)\, dt\right] \quad (58)$$

Pengintegralan pada suku pertama akan dijabarkan di bawah ini:

$$\int_{t_w}^{2t_w} \ln\left(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) dt = \int_{t_w}^{2t_w} \ln\left(T_s\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)}\right)\right) dt \qquad (59)$$

$$\int_{t_w}^{2t_w} \ln\left(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) dt = \int_{t_w}^{2t_w} \left(\ln(T_s) + \ln\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)}\right)\right) dt \qquad (60)$$

$$\int_{t_w}^{2t_w} \ln\left(T_s + (T_a - T_s)e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) dt = \int_{t_w}^{2t_w} \ln\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) dt + \int_{t_w}^{2t_w} \ln(T_s)\, dt \qquad (61)$$

dengan mensubstitusikan pers. (59-61) ke pers. (56-58) maka persamaan rerata entropi menjadi:

$$\overline{S_{s \to a}} = -\frac{m_a c_a}{t_w}\left[\int_{t_w}^{2t_w} \ln\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) dt + \int_{t_w}^{2t_w} \ln(T_s)\, dt - \int_{t_w}^{2t_w} \ln(T_s)\, dt\right] \qquad (62)$$

$$\overline{S_{s \to a}} = -\frac{m_a c_a}{t_w}\left[\int_{t_w}^{2t_w} \ln\left(1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)}\right) dt\right] \qquad (63)$$

Pemisalan fungsi:

$$u = 1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)} \qquad (64)$$

kemudian diturunkan sekali menjadi:

$$\frac{du}{dt} = \alpha \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)} = \alpha(u - 1) \qquad (65)$$

atau:

$$dt = \frac{du}{\alpha(u-1)} \qquad (66)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan pers. (64) dan (65) ke pers. (62-63) diperoleh hasil:

$$\overline{S_{s \to a}} = -\frac{m_a c_a}{\alpha t_w} \int_{t_w}^{2t_w} \ln(u) \frac{du}{(u-1)} \qquad (67)$$

dari hasil dari Deret Maclaurin sebelumnya pers. (34-35) dengan mengubah nilai batas bawah waktu (t_w) dan batas atas waktu ($2t_w$), yaitu:

$$\int_{t_w}^{2t_w} \frac{\ln(u)}{u-1} du = \left[u - \frac{1}{2^2}(u-1)^2 + \frac{1}{3^2}(u-1)^3 - \frac{1}{4^2}(u-1)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}(u-1)^n\right]_{t_w}^{2t_w} \qquad (68)$$

dengan mensubstitusikan pers. (64) ke pers. (68) maka akan dihasilkan persamaan:

$$\int_{t_w}^{2t_w} \frac{\ln(u)}{u-1} du = \left[1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)} - \frac{1}{2^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)}\right)^3 - \frac{1}{4^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)}\right)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha(2t_w - t)}\right)^n\right]_{t_w}^{2t_w} \qquad (69)$$

batas bawah dan atas dimasukkan ke dalam fungsi:

$$\int_{t_w}^{2t_w} \frac{\ln(u)}{u-1} du = \left[1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} - \frac{1}{2^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^n\right] - \left[1 + \frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha t_w} - \frac{1}{2^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha t_w}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha t_w}\right)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s} e^{-\alpha t_w}\right)^n\right] \qquad (70)$$

disederhanakan lagi menjadi:

$$\int_{t_w}^{2t_w} \frac{\ln(u)}{u-1} du = \frac{(T_a - T_s)}{T_s}(1 - e^{-\alpha t_w}) - \frac{1}{2^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^2 (1 - e^{-2\alpha t_w}) + \frac{1}{3^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^3 (1 - e^{-3\alpha t_w}) + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^n (1 - e^{-n\alpha t_w}) \tag{71}$$

atau dapat disingkat penulisannya menjadi:

$$\int_{t_w}^{2t_w} \frac{\ln(u)}{u-1} du = \frac{(T_a - T_s)}{T_s}(1 - e^{-\alpha t_w}) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^k (1 - e^{-k\alpha t_w}) \tag{72}$$

Selanjutnya mensubstitusikan pers. (72) ke pers. (62-63) akan diperoleh hasil formula rerata entropi arah mundur dari T_s menuju T_a selama rentang waktu t_w, yaitu:

$$\overline{S_{s\to a}} = -\frac{m_a c_a}{\alpha t_w}\left[\frac{(T_a - T_s)}{T_s}(1 - e^{-\alpha t_w}) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\left(\frac{(T_a - T_s)}{T_s}\right)^k (1 - e^{-k\alpha t_w})\right] \tag{73}$$

Bila $e^{-k\alpha t_w} \approx 0$, dan $(T_a - T_s) = -(T_s - T_a)$ maka dapat disederhanakan menjadi:

$$\overline{S_{s\to a}} = \frac{m_a c_a}{t_w}\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(\frac{(T_s - T_a)}{T_s}\right)^k \tag{74}$$

Dengan cara yang sama, maka hasil persamaan rerata entropi untuk proses $s \to b$ saat menerima kalor pada periode t_w adalah:

$$\overline{S_{s\to b}} = -\frac{m_b c_b}{t_w}\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{T_b - T_s}{T_s}\right)^k = \frac{m_b c_b}{t_w}\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k^2}\left(\frac{T_b - T_s}{T_s}\right)^k \tag{75}$$

Hasil total jumlahan persamaan rerata entropi proses $s \to a$ dan $s \to b$ pada periode t_w adalah:

$$\overline{S_{T-}} = \overline{S_{s\to a}} + \overline{S_{s\to b}} \tag{76}$$

$$\overline{S_{T-}} = \frac{m_a c_a}{t_w}\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(\frac{(T_s - T_a)}{T_s}\right)^k + \frac{m_b c_b}{\alpha t_w}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k^2}\left(\frac{T_b - T_s}{T_s}\right)^k \tag{77}$$

Menurut Hukum Termodinamika 2.1 atau Hukum Entropi Goen, maka pada proses pencampuran nilai rerata total entropi mundur ($\overline{S_{s\to b}}$ dan $\overline{S_{s\to a}}$) akan lebih besar atau sama dengan nilai rerata total entropi maju ($\overline{S_{a\to s}}$ dan $\overline{S_{b\to s}}$), yaitu:

$$\overline{S_{s\to a}} + \overline{S_{s\to b}} \geq \overline{S_{a\to s}} + \overline{S_{b\to s}} \tag{78}$$

Dengan mensubstitusikan pers. (44) dan pers. (52b) ke pers. (77-78) akan diperoleh hasil pertidaksamaan di bawah ini:

$$\frac{m_a c_a}{\alpha t_w}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{T_a}{T_s}\right)^k + \frac{m_b c_b}{\alpha t_w}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\left(\frac{T_b}{T_s} - 1\right)^k \geq m_a c_a\left[\ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right) - \frac{1}{\alpha t_w}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{T_a}{T_s}\right)^k\right] + m_b c_b\left[\ln\left(\frac{T_s}{T_b}\right) + \frac{1}{\alpha t_w}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\left(\frac{T_b}{T_s} - 1\right)^k\right] \tag{79}$$

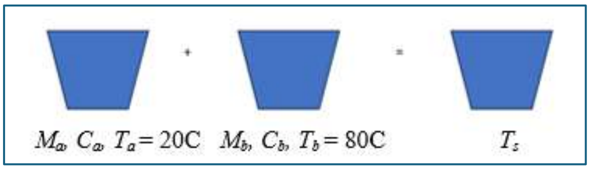
Selanjutnya dari pers. (80) dapat diperoleh pertidaksamaan parameter α:

$$0 \leq \alpha \leq \frac{2\left[m_a c_a \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{T_a}{T_s}\right)^k + m_b c_b \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\left(\frac{T_b}{T_s} - 1\right)^k\right]}{t_w\left[m_a c_a \ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right) + m_b c_b \ln\left(\frac{T_s}{T_b}\right)\right]} \tag{80}$$

Misal $m_a c_a = m_b c_b$

$$0 \le \alpha \le \frac{2\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{T_a}{T_s}\right)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\left(\frac{T_b}{T_s}-1\right)^k\right]}{t_w\left[\ln\left(\frac{T_s}{T_a}\right)+\ln\left(\frac{T_s}{T_b}\right)\right]} \qquad (81)$$

Dengan menggunakan hasil pertidaksamaan pers. (81), misal dalam pembahasan nilai pencampuran sesama air maka nilai kapasitas panas $c_a = c_b$ dan kedua termos berisi air dengan massa sama $m_a = m_b$, serta suhu air dalam termos T_a = 20C dan T_b = 80C, seperti tampak pada Gambar 3 dibawah ini.



Gambar 3. Pencampuran 2 Zat Cair

Nilai suhu campuran T_s adalah:

$$T_s = \frac{m_a T_a + m_b T_b}{m_a + m_b} = \frac{T_a + T_b}{2} = 50C \qquad (82)$$

Kemudian data awal T_a = 20C dan T_b = 80C serta hasil suhu kesetimbangan campuran $T_s = 50C$ disubstitusikan ke pers. (81) dalam satuan suhu Kelvin (K) diperoleh hasil pertidaksamaan:

$$0 \le \alpha \le \frac{0{,}9978}{t_w} \qquad (83)$$

Pada contoh lain, misal dalam pembahasan nilai pencampuran sesama air maka nilai kapasitas panas $c_a = c_b$ dan kedua termos berisi air dengan massa sama $m_a = m_b$, serta suhu air dalam termos T_a = 35C dan T_b = 85C, seperti tampak pada Gambar 4 di bawah ini.

Gambar 4. Pencampuran 2 Zat Cair

Nilai suhu campuran T_s adalah:

$$T_s = \frac{m_a T_a + m_b T_b}{m_a + m_b} = \frac{T_a + T_b}{2} = 60C \qquad (84)$$

Kemudian data awal T_a = 35C dan T_b = 85C serta hasil suhu kesetimbangan campuran pers. (84) disubstitusikan ke pers. (81) dalam satuan internasional suhu yaitu Kelvin (K) maka diperoleh hasil pertidaksamaan:

$$0 \le \alpha \le \frac{0{,}9986}{t_w} \qquad (85)$$

Pemodelan fungsi eksponential terbukti benar karena pada contoh simulasi pencampuran memungkinkan nilai parameter α lebih besar dari nol yaitu nilai $0 \le \alpha \le \frac{0{,}9978}{t_w}$ atau $0 \le \alpha \le \frac{0{,}9986}{t_w}$.

Keunggulan penelitian ini adalah kemampuan secara analitis membuat model non-linier eksponential fungsi waktu terhadap suhu sebagai aliran panas hingga mencapai kesetimbangan termal mulai dari keadaan awal kedua zat cair, sedangkan secara praktek atau percobaan pembuatan model fungsi tersebut dengan cara pengukuran langsung tidak dapat dilakukan karena kedua zat cair tersebut langsung tercampur bersamaan. Dalam praktek yang dapat dilakukan pengukuran fungsi aliran panas terhadap waktu hingga mencapai kesetimbangan termal adalah pengukuran suhu dari salah satu zat cair sebelum tercampur kemudian setelah terjadi penggabungan zat cair kedua dilakukan pengukuran perubahan suhu terhadap waktu hingga mencapai kesetimbangan panas. Misalnya pengukuran suhu awal zat cair pada termos A, kemudian dilakukan pencampuran oleh zat cair termos B dan suhu dimana terjadi penyerapan panas karena $T_a < T_b$. Menurut hasil penelitian secara analitis model fungsi suhu yang bergerak dari suhu awal T_a hingga mencapai suhu kesetimbangan T_s adalah berupa fungsi eksponential mirip seperti tampak pada model grafik Gambar 1 bagian bawah. Lain halnya bila misalnya pengukuran suhu awal zat cair pada termos B, kemudian dilakukan pencampuran oleh zat cair termos A dan suhu dimana terjadi pelepasan panas karena $T_b > T_a$.

Menurut hasil penelitian secara analitis model fungsi suhu yang bergerak dari suhu awal T_b hingga mencapai suhu kesetimbangan T_s adalah berupa fungsi eksponential yang akan mirip seperti tampak pada model grafik Gambar 1 bagian atas.

KESIMPULAN

Kebaruan dari penelitian ini adalah pembuktian Teoritis untuk pertama kalinya dengan menggunakan Hukum Entropi Goen atau Termodinamika 2.1 secara analitis model non-linier eksponential fungsi waktu terhadap suhu kedua zat cair dari awal hingga mencapai kesetimbangan termal pada proses pencampurannya. Secara teoritis melalui Hukum Entropi Goen ini ternyata dapat dilakukan pembuatan model non-linier eksponential proses aliran panas saat mencapai kesetimbangan termal pada pencampuran dua zat cair. Sehingga dapat disimpulkan kebaruan dari penelitian ini adalah membuktikan:

a. Kemajuan Ilmu Termodinamika dapat terus ditingkatkan melalui pemanfaatan Hukum Termodinamika 2.1 / Entropi Goen yang merupakan pengembangan dari Hukum Termodinamika Kedua.
b. Pemanfaatan untuk pertama kalinya Hukum Entropi Goen secara analisis dalam menentukan model non-linier eksponential fungsi suhu dari berjalannya waktu maju mulai dari awal hingga mencapai suhu kesetimbangan termal pada sistem pencampuran dua zat cair.

Berdasarkan pembuktian teoritis yang telah dipaparkan, hasil pemodelan fungsi non-linier ini memiliki potensi pengaplikasian yang luas, antara lain:

a. Analisis Efisiensi Termodinamika (Hukum 2.1): Pengaplikasian perbandingan rerata entropi arah maju dan mundur memberikan parameter baru bagi teknisi untuk mengevaluasi tingkat ireversibilitas suatu sistem termal. Hal ini bermanfaat dalam perancangan alat penukar panas (heat exchanger) yang lebih hemat energi.
b. Validasi Perangkat Lunak Simulasi: Model ini dapat digunakan sebagai standar verifikasi bagi perangkat lunak simulasi dinamika fluida, memastikan bahwa algoritma simulasi telah mengikuti kaidah hukum termodinamika yang bekerja pada domain waktu kontinu, bukan sekadar pendekatan linear sederhana.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. I. Goenawan, "Comparison Simulation Analysis of the Gradual Summation of a Function with Recognition of Direct Extrapolation Via IN Series", *International Journal of Applied Sciences and Smart Technologies*, vol. 02, no. 01, pp. 59–66, Jun. 2020, doi: https://doi.org/10.24071/ijasst.v2i1.1969.

[2] Goenawan, Stephanus Ivan, 2025. Pengukuran Rerata Entropi Mesin dengan Metode Entropi Diskrit Penjumlahan Ganda (MED-PG) dan Metode Entropi Diskrit Penjumlahan Tunggal (MED-PT). Terdaftar Paten.

[3] Goenawan, Stephanus Ivan. 2025. The Law of Thermodynamics 2.1 Average Entropy in The Forward Direction Smaller Than the Backward Explaining the Working System Process of Energy Flow, Proceedings of the International Conference on Informatics, Mechanical, Industrial, and Chemical Engineering (ICIMICE2023). AIP Conf. Proc. 3250, 090005-1–090005-11. https://doi.org/10.1063/5.0240576.

[4] S. I. Goenawan, "Analytical Simulation of Linear Comparison of Temperature Changes Versus Time in the Heat Equilibrium Process of Mixing Two Liquids," Cylinder : Jurnal Ilmiah Teknik Mesin, vol. 10, no. 1, pp. 49–56, Apr. 2024, doi: https://doi.org/10.25170/cylinder.v10i1.5473.

[5] Ziegler, H. An Introduction to Thermo-mechanics. North Holland, Amsterdam, 1983. ISBN 978-0444865038.

[6] Kleidon, A.; et. al. Non-equilibrium Ther-modynamics and the Production of Entropy. Heidelberg: Springer 2005. ISBN 978-3642061356 [11] David A.

Freedman. Statistical Models: Theory and Practice. Cambridge University Press. 2009. ISBN 978-1-139-47731-4.

[7] David A. Freedman. Statistical Models: Theory and Practice. Cambridge University Press. 2009. ISBN 978-1-139-47731-4.

[8] Lavenda. Bernard H, A new perspective on thermodynamics, New York: Springer, 2010, ISBN 978-1-4419-1430-9.

[9] Martyushev. L. M. and Seleznev. V. D., *2014.* "The restrictions of the maximum entropy production principle", *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications.* 410, pp: 17-21.

[10] Moran. Michael J, and Howard. N Shapiro, 2008. *Fundamentals of Engineering Thermo-dynamics,* 6th ed, Wiley and Sons: 16.

[11] R. Giles, 2016. Mathematical Foundations of Thermodynamics: International Series of Monographs on Pure and Applied Math-ematics, *Elsevier Science,* ISBN 978-1-4831-8491-3.

[12] Sethna. James, 2006. Statistical mechanics : en-tropy, order parameters, and complexity. Oxford University Press. pp: *78. ISBN 978-0-19-856677-9*.

[13] Saha. Arnab, Lahiri. Sourabh and A.M. Jayannavar, 2009. "Entropy production theorems and some consequences", Physical Review E. 80.

[14] Sachidananda. Kangovi, 2020. "The law of Dis-order," ISBN 9798677301285, Amazon Publishing.